Steven Hopman

Eenvoudig delen door een breuk, via de verhoudings-gedachte

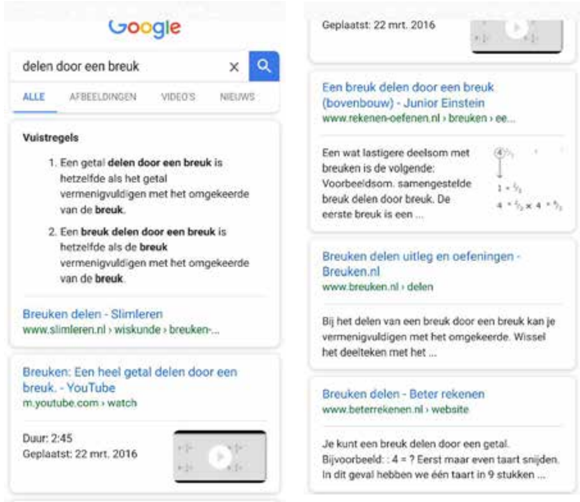
Ook als het op rekenen aankomt is het meestal niet handig om een rekenregel domweg 'volgens het boekje' toe te passen. Een typisch voorbeeld hiervan is: delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde. Men vergeet vaak rekenregels en dan is er verder niets om op terug te vallen. In bovenstaand voorbeeld kan het ook heel anders. Als vermenigvuldigen met een breuk zo gemakkelijk is, dan moet delen door een breuk net zo gemakkelijk zijn vanwege de inverse relatie. In dit artikel leest u over een praktijkgerichte situatie in de opleiding van pabo-studenten rondom dit onderwerp.

Steven Hopman is werkzaam als wiskundedocent op de Marnix Academie.

'Eeeh, hoe was het ook alweer: vermenigvuldigen met een breuk is delen… Nee, eeeh delen door een breuk is vermenigvuldigen …'

Onbegrepen rekenregels

Als opleider maak ik het vaak mee: onbegrepen rekenregels die soms wel en soms niet goed worden opgedreund door een student. Vooral het eerste, de onbegrepen rekenregels, zijn natuurlijk een kwalijke zaak. Een student die een *onbegrepen* regel niet meer exact uit zijn geheugen kan halen, heeft verder niets om op terug te vallen. In zo'n situatie stagneert het rekenwerk. Daarnaast ontstaan er vaak problemen met de toepasbaarheid. Studenten hebben niet altijd even goed door in welke situatie ze de rekenregel mogen toepassen en wanneer niet.



▲ Afbeelding 1.

Ook als we googelen op ‘delen door een breuk’ zien we bij veel bronnen hetzelfde beeld van de (onbegrepen) regel zonder enige uitleg (afbeelding 1)

Vermenigvuldigen met een breuk

In het kader van de kennisbasistoets rekenen staat het onderwerp breuken op het programma. Een onderdeel hiervan is het vermenigvuldigen en delen van breuken. Bij de bespreking gebruik ik de volgende opdracht uit afbeelding 2.

Breukensom

- Kies één van de onderstaande breukensommen.
- Maak bij die som een passend verhaaltje (verhaalsom).
- Los de som op met behulp van een passend model, teken het model erbij.
- Los de som op op formeel niveau, dus alleen door getallen te gebruiken

$12 \times \frac{2}{5} =$ $\quad \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} =$ $\quad 6 : \frac{2}{3} =$ $\quad 3\frac{1}{3} : \frac{2}{3} =$

◀ Afbeelding 2.

Bij de eerste twee opgaven staat het begrijpen van het vermenigvuldigen van breuken centraal. In dit kader kan het een verrijking zijn om de vertaalcirkel van Ceciel Borghouts (2012) er op na te slaan.
Studenten hebben bij de eerste opgave vaak de neiging om de context van pizza’s te kiezen: je hebt stukken van $\frac{2}{5}$ pizza. Door te vermenigvuldigen kom je dan op 24 stukken pizza. Een hele pizza bestaat uit 5 stukken, en daarmee kom je op de breuk: $\frac{24}{5}$.
In formele notatie ziet dat er zo uit: $\frac{12}{1} x \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$.
Als we de helen eruit halen, kom je in totaal op 4 hele pizza’s en nog eens $\frac{4}{5}$ pizza. De tweede som komt daarna op soortgelijke wijze aan bod. De bespreking leidt ertoe dat studenten inzien dat formeel vermenigvuldigen met breuken eigenlijk heel erg gemakkelijk is, maar dat het altijd van belang is dat je weet wat je doet.

Delen door een breuk

Vervolgens komt de opdracht om bij som $6 : \frac{2}{3}$ een passend verhaal te maken, omdat de studenten zo kunnen laten zien dat ze begrijpen wat deze som betekent. Studenten willen dan nog weleens in de context van pizza’s blijven hangen. Bijvoorbeeld: je hebt 6 pizza’s en van iedere pizza is $\frac{2}{3}$ deel bedekt met ananas. Maar ze zien gelukkig snel in dat dit geen passend verhaal is bij deze som, omdat bij deze situatie de som $6 \times \frac{2}{3}$ hoort. Een passend verhaal en model bij deze som helpt studenten om tot het inzicht te laten komen dat de bewerking hier is: ‘hoe vaak past $\frac{2}{3}$ in 6?’. Een passend verhaal kan bijvoorbeeld zijn: je hebt 6 liter water en je schept er telkens $\frac{2}{3}$ liter water uit.
Daarna komt het formele gedeelte aan bod en dan begint het gestotter met allerlei regels. Als ik dan vraag waarom een specifieke rekenregel wel of niet werkt, blijft het altijd heel erg stil. De ‘waarom-vraag’ mag kennelijk niet gesteld worden. Met de volgende stelling ga ik met studenten aan de slag met de formele bewerking:

“Als formeel vermenigvuldigen met een breuk zo gemakkelijk is, dan kan het toch niet zo zijn dat formeel delen door een breuk zo lastig is?”

Het is niet meer dan een inverse bewerking. Zoals optellen en aftrekken elkaars inverse zijn, zo zijn delen en vermenigvuldigen ook elkaars inverse. Studenten reageren hier meestal redelijk apathisch op. We proberen het met elkaar uit:

Docent	Als je 6 x $\frac{2}{3}$ = puur formeel wil uitrekenen, wat is dan je eerste ‘gemakkelijke’ stap?
Student	$\frac{6}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$

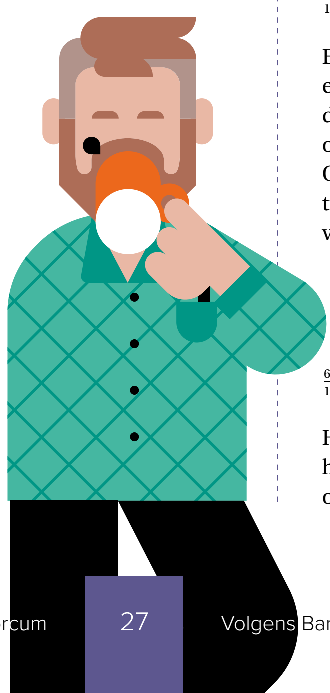
En nu gaan we op exact dezelfde wijze delen.

Docent	Wat is je eerste stap bij 6 : $\frac{2}{3}$?
Student	$\frac{6}{1} : \frac{2}{3} =$

Op dit punt merk ik altijd dat het handig is om de studenten een zetje te geven:
‘Het is dus mogelijk, net als bij vermenigvuldigen om 6 : 2 te doen en 1 : 3, dus:
$\frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{3}{\frac{1}{3}}$’

Een veel gestelde vraag is dan: ‘Een breuk in een breuk, mag dat?’ Als docent geeft ik aan dat dit mag, maar dat het wel wat onhandig lijkt omdat we het niet gewend zijn.
Om tot de volgende stap te komen, geef ik tips als: ‘denk in verhoudingen’, ‘maak er een verhoudingstabel van’, of ‘denk aan omgekeerd vereenvoudigen’.
Daar komen de studenten wel uit. De noemer dient 1 gemaakt te worden, door teller en noemer te vermenigvuldigen met 3.
$\frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{1} = 9$

Het voordeel is dat we nu ‘gewoon’ gedeeld hebben zonder ingewikkelde trucjes en onbegrepen rekenregels te gebruiken. Daarna



hebben de studenten in verhoudingen gedacht of omgekeerd vereenvoudigd.

'Werkt dit altijd?'

Vaak willen studenten dan nog een voorbeeldsom zien om daarmee te controleren of het echt werkt. *Ze geloven het bijna niet*... Ik vraag ze altijd zelf met een voorbeeld te komen om hiermee te laten zien dat ik niet met perfecte schoolvoorbeelden wil werken. Zo kreeg ik de vraag om $\frac{5}{4} : \frac{2}{3}$ uit te werken. Dat ging als volgt:

$\frac{5}{4} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{3}}$

Domweg delen levert in dit geval geen fraai resultaat op, wat bijvoorbeeld wel direct het geval zou zijn bij $\frac{7}{8} : \frac{1}{2} =$. Dat zou $\frac{7}{4}$ zijn, wat leidt tot $1\frac{3}{4}$. In het voorbeeld van de student doorlopen we de volgende stappen:

Docent	In verhoudingen denken: Wat moeten we doen om van de noemer $\frac{4}{3}$ het getal 1 te maken?
	Eventuele hint: $\frac{4}{3}$ x ? = $\frac{1}{1}$
Student	Vermenigvuldigen met $\frac{3}{4}$

Vervolgens kan $\frac{5}{2}$ ook met $\frac{3}{4}$ vermenigvuldigd worden om te komen tot $\frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.
Het mooie van deze aanpak is dat studenten nu zelf inzien waarom delen door een breuk vermenigvuldigen met het omgekeerde is, omdat het omgekeerde (de reciproke) van $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ is.
Als laatste kan dan eventueel nog gesteld worden dat de som $\frac{5}{4} : \frac{2}{3} =$ ook kan leiden tot $\frac{5}{4} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}}$.
Het is enkel een andere notatie. We kunnen via de verhoudingsgedachte, $\frac{5}{4}$ met $\frac{3}{2}$ vermenigvuldigen om direct bij het antwoord te komen.

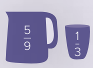
Transfer naar de basisschool

Mijn doel met deze aanpak in de les is dat studenten in hun eigen praktijksituatie in staat zijn om een transfer te maken naar de kinderen op de basisschool. Ze kunnen de verhoudingsgedachte gebruiken om kinderen te duidelijk maken dat de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' niet uit de lucht komt vallen. Het is geen 'geheimzinnige formule' waar je verder geen vragen over mag stellen.

Overigens gebeurt dit in bijvoorbeeld de methode Rekenrijk uitstekend. De verhoudingsgedachte wordt toegepast, zoals in afbeelding 3 te zien is.

Hoeveel bekers kun je vullen?

voorbeeld:



Liter

som:

$$\begin{matrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{15}{9} & 1 \end{matrix}$$

3 x   3 x

In taal: je kunt één beker helemaal vullen en de tweede beker voor $\frac{2}{3}$ deel.

$\frac{15}{9} = 1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$

▲ Afbeelding 3. Bron: Rekenrijk 8a, blz 106.

In dit voorbeeld is het ook heel goed mogelijk om van links naar rechts te delen, omdat er direct hele getallen uitkomen:

$\frac{5}{9} : \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

Zo bezien is delen door een breuk een gemakkelijke opdracht en hoeft de verhoudingsgedachte niet altijd toegepast te worden.

De meeste rekenmethodes passen een andere methode toe om het delen door een breuk uit te leggen, zie afbeelding 4.

◀ Afbeelding 4. Bron: Pluspunt lesboek groep 8, blz. 110.

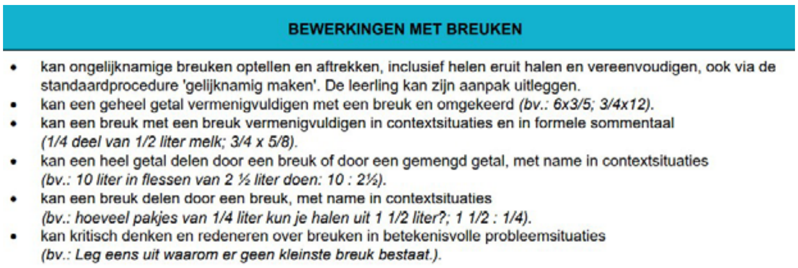
Daarbij komt het (formeel) delen van een breuk, door een breuk niet direct aan de orde. Mijns inziens is dit een gemiste kans omdat de tussendoelen van de SLO aangeven dat dit wel in contextsituaties aan de orde dient te komen (zie punt 5 in afbeelding 5).

Conclusie

Redeneren en discussiëren dienen centraal te staan bij rekenen-wiskunde. Je kunt studenten niet opzadelen met onbegrepen rekenregels. Aanpakken die 'dichtbij' en meer voor de hand liggen, geven studenten de mogelijkheid om zelf onbegrepen rekenregels te ontdekken en te begrijpen. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de kinderen op de basisschool. Op die manier is het ook mogelijk om het didactisch niveau van de leerkrachten in opleiding te verhogen. Daar zullen uiteindelijk de kinderen op de basisschool hun voordeel mee doen, omdat de kwaliteit van het onderwijs voor het overgrote deel bepaald wordt door de leerkracht zelf.

Literatuur

- Borghouts, C., (2011). De vertaalcirkel. *Volgens Bartjens, 31*(2), *8-11.*
- Borghouts, C., Buter, A., & Veltman, A., (2011). Rekenrijk. Groningen: Noordhoff
- Erich, L., Huitema, S., Van Hijum, R., Nillesen, C., Osinga, H., Veltman, H., & Van de Wetering, M., (2019). De Wereld in getallen. 's Hertogenbosch: Malmberg
- SLO. (2017). Tussendoelen rekenen-wiskunde voor het primair onderwijs. Geraadpleegd op 17 februari 2021, van https://www.slo.nl/publish/pages/3176/tussendoelen-rekenen-wiskunde-po-2017_1.pdf



BEWERKINGEN MET BREUKEN

- kan ongelijknamige breuken optellen en aftrekken, inclusief helen eruit halen en vereenvoudigen, ook via de standaardprocedure 'gelijknamig maken'. De leerling kan zijn aanpak uitleggen.
- kan een geheel getal vermenigvuldigen met een breuk en omgekeerd *(bv.: 6x3/5; 3/4x12).*
- kan een breuk met een breuk vermenigvuldigen in contextsituaties en in formele sommentaal *(1/4 deel van 1/2 liter melk; 3/4 x 5/8).*
- kan een heel getal delen door een breuk of door een gemengd getal, met name in contextsituaties *(bv.: 10 liter in flessen van 2 ½ liter doen: 10 : 2½).*
- kan een breuk delen door een breuk, met name in contextsituaties *(bv.: hoeveel pakjes van 1/4 liter kun je halen uit 1 1/2 liter?; 1 1/2 : 1/4).*
- kan kritisch denken en redeneren over breuken in betekenisvolle probleemsituaties *(bv.: Leg eens uit waarom er geen kleinste breuk bestaat.).*

▲ Afbeelding 5. Uit: SLO (2017). Tussendoelen rekenen-wiskunde primair onderwijs.

